

一类非线性晶体界面表面波的渐近解*

史娟荣^{1,2}, 林万涛³, 莫嘉琪⁴

(1. 安徽机电职业技术学院, 安徽 芜湖 241002;

2. 上海交通大学数学系, 上海 200240;

3. 中国科学院大气物理研究所//大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029;

4. 安徽师范大学数学系, 安徽 芜湖 241003)

摘要: 研究了一类晶体界面非线性表面波。首先考虑了对应的晶体界面表面波方程, 引入一个新的具有限制变量的泛函, 并求出其变分。再利用变分原理, 构造了一个经过改进后的广义变分迭代式。然后选取相应问题解的初始函数, 并由新的迭代关系式依次求出各次渐近解析解。举例说明了用本方法求得的渐近解具有较好的近似度。最后叙述了得到的渐近解的物理意义。

关键词: 表面波; 渐近解; 变分; 晶体

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2015)06-0041-05

Asymptotic Solution on a Class of Nonlinear Surface Waves along the Boundary of Crystal

SHI Juanrong^{1,2}, LIN Wantao³, MO Jiaqi⁴

(1. Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhu 241002, China;

2. Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;

3. State Key Laboratory of Numerical modeling for Atmospheric and Geophysical Fluid Dynamics// Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

4. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

Abstract: A class of nonlinear surface waves along the boundary of crystal is studied. Firstly, the surface wave equation along the boundary of crystal is built. Leading into a functional with the new restricted variation and its variational is calculated. Secondly, a new improved generalized variational iteration is structured. Then the initial function of solution for corresponding problem is structured. From the new variational iteration, the each time asymptotic analytic solution is found successively. And from example, the accuracy of solution is very good by using this method. Finally, the physical meaning of obtained asymptotic solution is related.

Key words: surface waves; asymptotic solution; variational; crystal

光折变晶体中的空间表面波理论一直是学者关注的热点。上世纪末到本世纪初首先提出了光折变表面波的理论, 论述了关于扩散机理下光折变表面

波的传播情况。并讨论了线性介质与光折变晶体界面表面波的形成过程和表面波的传播的稳定性。近来讨论了在 LiNbO₃:Fe 晶体与空气界面观察到了

* 收稿日期: 2015-07-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41275062); 安徽省教育厅自然科学基金资助项目(KJ2015A418, KJ2015A347)

作者简介: 史娟荣(1981年生), 女; 研究方向: 应用数学; 通讯作者: 莫嘉琪; E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

亮表面波, 在界面处由晶体内载流子扩散机理引起的光束弯曲和反射相平衡而形成的一种光波。其特点是将光波传播限制在光折变晶体近表面的狭层内, 使得界面处具有很高的光能量和功率密度, 这在光通信及光信息处理等方面有很高的研究和应用价值^[1-6]。由于高激发效率的表面波在应用中具有功耗低, 速度快等优点。所以研究提高表面波的激发效率成为表面波应用的重要方面。

非线性微分方程的精确解, 一般不能用有限项的初等函数来表示。故用近似的方法来求非线性方程的渐近解析解显得十分重要^[7-8]。作者等也利用各种渐近方法来得到相关的非线性方程的渐近解析解^[9-22]。本文是用经过改进的广义变分迭代的新方法, 来求得一类晶体界面非线性表面波的渐近解析解。

1 晶体界面表面波方程

考虑一束光波在 LiNbO₃ 晶体界面沿 x 轴方向衍射, 沿垂直于 x 轴的 z 轴方向传播, x 轴右侧 ($x > 0$) 是空气, 左侧 ($x < 0$) 是 LiNbO₃ 晶体。在无外加电场条件下, LiNbO₃ 晶体中的光伏和扩散非线性空间电荷场为: $E_{sc} = -\frac{E_p I}{I + I_d} + \frac{k_B T}{e(I/I_d + 1)} \cdot \frac{\partial(I/I_d)}{\partial x}$, 这里 $I = |A|^2$ 为光波的强度, k_B 为玻尔兹曼常数, T 为绝对温度, e 为电子的电荷量, I_d 为晶体中的暗辐射, E_p 为光伏场常数。

为了方便, 采用无量纲坐标, 横坐标和纵坐标分别为 $s = x/x_0$ 和 $\xi = z/(k_0 x_0^2)$, 其中 x_0 为任意空间宽度, $k_0 = 2n_0/\lambda$ 为空气中的波数, n_0 为光波在空气中的折射率, λ 为入射光束的波长。我们可以得到光波振幅 A 满足的演化方程^[6]

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial s^2}, \quad s \geq 0 \quad (1)$$

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial s^2} - \varphi A - \alpha \frac{I}{I + I_d} A - \frac{\mu}{I/I_e + 1} \frac{\partial(I/I_d)}{\partial s} A, \quad s < 0 \quad (2)$$

其中 φ 为波导参数, μ 为扩散强度, α 为光伏强度, 方程 (2) 右端各项依次为晶体中光波的衍射效应、光束和边界的相互作用、光伏机理的自散焦和扩散机理的自弯曲效应。光束以一定角度入射到 LiNbO₃ 晶体界面, 当电荷扩散效应产生的光束自弯曲与全内反射相平衡时, 光生伏打光折变晶体, 光激发载流子是电子, 并可取光伏强度 $\alpha < 0$ 。

设光波振幅 $A = \sqrt{I_d} u(s) \exp(ib\xi)$, 其中 $u(s)$ 是光波的模, b 是传播系数。于是可得到 $u(s)$ 和 du/ds 在界面 $s = 0$ 处的连续性。由方程 (1) - (2) 可得下方程^[6]

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 2bu, \quad s \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 2(b - \varphi)u - \frac{2\alpha u^3}{1 + u^2} + \frac{4\mu u^2}{1 + u^2} \frac{du}{ds}, \quad s < 0 \quad (4)$$

显然, 方程 (3) 的解为

$$u(s) = m \exp(-\sqrt{2b}s), \quad s \geq 0 \quad (5)$$

其中 m 为非线性作用强度的可变参量, 它由入射光束初始强度决定。考虑到方程的解 u 和 du/ds 在界面 $s = 0$ 的连续性, 由式 (5) 可决定方程 (4) 的终值条件。于是我们便有如下的光波沿 $s(s < 0)$ 方向 LiNbO₃ 晶体满足的傍轴方程的模型

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 2(b - \varphi)u - \frac{2\alpha u^3}{1 + u^2} + \frac{4\mu u^2}{1 + u^2} \frac{du}{ds}, \quad s < 0, \quad u(0) = m, \quad \frac{du(0)}{ds} = -\sqrt{2bm} \quad (6)$$

2 晶体界面模型解

首先将方程 (4) 改写为

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 4\mu \frac{du}{ds} + 2(b - \varphi - \alpha)u - \frac{4\mu}{1 + u^2} \frac{du}{ds} + \frac{2\alpha u}{1 + u^2}, \quad s < 0 \quad (7)$$

为了求得晶体界面内的非线性问题 (6) - (7) 的渐近解析解, 我们用新的经过改进的广义变分迭代方法。

引入一个泛函 $F[u]$ ^[23-24]

$$F[u] = u - \int_s^0 \lambda(\xi) \left[\frac{d^2 u}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u + \frac{4\mu}{1 + u^2} \frac{du}{d\xi} - \frac{2\alpha u}{1 + u^2} \right] d\xi \quad (8)$$

式中 \bar{u} 为 u 的限制变量^[23-24]。将泛函式 (8) 并进行变分运算 δF :

$$\delta F = \delta u - [\lambda]_{\xi=s} \delta u_{\xi} + [(\lambda_{\xi} + 4\mu\lambda)]_{\xi=s} \delta u - \int_s^0 [\lambda_{\xi\xi} + 4\mu\lambda_{\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)\lambda] \delta u ds$$

令 $\delta F = 0$, 得

$$\lambda_{\xi\xi} + 4\mu\lambda_{\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)\lambda = 0 \quad (9)$$

$$\lambda(s) = 0, \lambda'(s) = -1 \quad (10)$$

不难得到初值问题 (9) - (10) 的解 $\lambda(\xi)$ 为

$$\lambda(\xi) = \frac{-1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \exp(-2\mu(\xi - s)) \times$$

$$\sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s)) \quad (11)$$

再由式 (8) 和式 (11), 构造一个经过新的广义变分迭代

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \times \int_s^0 [\exp(-2\mu(\xi - s)) \times \sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s))] \times \left[\frac{d^2 u_n}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du_n}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u_n + \frac{4\mu}{1 + u_n^2} \frac{du_n}{d\xi} - \frac{2\alpha u_n}{1 + u_n^2} \right] d\xi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

其中 u_0 为初始近似。

3 模型的渐近解

首先决定晶体界面内非线性模型解的广义变分迭代的初始近似 $u_0(\xi)$ 。

选取初始近似 $u_0(\xi)$ 为方程 (7) 的线性部分及初始条件 (6) 所组成的问题的解。即 $u_0(\xi)$ 满足如下终值问题

$$\frac{d^2 u_0}{ds^2} = 4\mu \frac{du_0}{ds} + 2(b - \varphi - \alpha)u_0, s < 0 \quad (13)$$

$$u_0(0) = m, \quad \frac{du_0(0)}{ds} = -\sqrt{2bm} \quad (14)$$

不难得到模型 (13) - (14) 的解 $u_0(s)$ 为

$$u_0(s) = m \exp(2\mu s) \left[\cos(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}s) - \frac{\sqrt{2b} + 2\mu}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}s) \right], \quad s \leq 0 \quad (15)$$

于是由式 (12), 我们可得晶体界面内非线性模型 (6) - (7) 的一次渐近解析 $u_1(\xi)$

$$u_1(s) = u_0(s) + \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \times \int_s^0 [\exp(-2\mu(\xi - s)) \times \sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s))] \times \left[\frac{4\mu}{1 + u_0^2} \frac{du_0(\xi)}{d\xi} - \frac{2\alpha u_0(\xi)}{1 + u_0^2} \right] d\xi \quad (16)$$

其中 u_0 由式 (15) 表示。

再由式 (12), 我们可得晶体界面内非线性模型 (6) - (7) 的二次渐近解析 $u_2(\xi)$

$$u_2(s) = u_0(s) + \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \times \int_s^0 [\exp(-2\mu(\xi - s)) \times$$

$$\sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s))] \times \left[\frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du_1}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u_1 + \sum_{i=0}^1 \left(\frac{4\mu}{1 + u_i^2} \frac{du_i}{d\xi} - \frac{2\alpha u_i}{1 + u_i^2} \right) \right] d\xi \quad (17)$$

其中 u_0, u_1 分别由式 (15)、式 (16) 表示。

继续由迭代式 (12), 我们可得晶体界面 $s = 0$ 内非线性模型 (6) - (7) 的更高次的渐近解析解 $u_n(s) (n = 3, 4, \dots)$ 。

再由关系式 (5), 我们便得到通过晶体界面光波的模 $u(s)$ 在晶体界面 $s = 0$ 附近的广义变分迭代第 n 次渐近解析解。

$$u(s) = \begin{cases} m \exp(-(2b)^{1/2}s), & s \geq 0, \\ u_n(s), & n = 1, 2, \dots, s < 0 \end{cases}$$

4 渐近解的精度

为了说明问题, 不妨简单设 $b = \varphi = m = \mu = 1, \alpha = -1$ 。这时晶体界面内光波模的非线性模型 (6) - (7) 为

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 4 \frac{du}{ds} + 2u - \frac{4}{1 + u^2} \frac{du}{ds} - \frac{2u}{1 + u^2}, \quad s < 0 \quad (18)$$

$$u(0) = 1, \quad \frac{du(0)}{ds} = -2 \quad (19)$$

由式 (15), 晶体界面内光波模的模型 (18) - (19) 的初始近似函数 $u_0(s)$ 为

$$u_0(s) = e^{2s} \left[\cos(\sqrt{6}s) - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{6}s) \right], \quad s \leq 0 \quad (20)$$

再由广义变分迭代式 (16), 得到晶体界面内光波模的模型 (18) - (19) 的一次、二次近似函数 $u_1(s), u_2(s)$ 。

$$u_1(s) = e^{2s} \left[\cos(\sqrt{6}s) - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{6}s) \right] + \frac{1}{\sqrt{6}} \int_s^0 [\exp(-2(\xi - s)) \sin(\sqrt{6}(\xi - s))] \cdot \left[\frac{4\mu}{1 + u_0^2} \frac{du_0(\xi)}{d\xi} + \frac{2u_0(\xi)}{1 + u_0^2} \right] d\xi \quad (21)$$

其中 u_0 由式 (20) 表示。

$$u_2(s) = e^{2s} \left[\cos(\sqrt{6}s) - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{6}s) \right] +$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \int_s^0 [\exp(-2(\xi - s)) \sin(\sqrt{6}(\xi - s))] \times$$

$$\left[\frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du_1}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u_1 + \right]$$

$$\sum_{i=0}^2 \left(\frac{4\mu}{1+u_i^2(\xi)} \frac{du_i(\xi)}{d\xi} + \frac{2u_i(\xi)}{1+u_i^2(\xi)} \right) d\xi \quad (22)$$

其中 u_0, u_1 分别由式 (20)、式 (21) 表示。

晶体界面 $s = 0$ 内左半面 ($s \leq 0$) 附近非线性模型 (16) - (17) 的光波的模 $u(s)$ 的模拟精确解曲线 $u_{\text{exa}}(s)$, 一次、二次广义变分迭代渐近解 $u_1(s), u_2(s)$ 的曲线见图 1 和表 1 所示。

表 1 晶体界面左半面附近光波的模 $u(s)$ 的模拟数值比较¹⁾

Table 1 Simulative numerical comparison for models to the light waves near left half-plane

项目	s				
	-2.0	-1.75	-1.5	-1.25	-1.0
u_1	0.26	0.36	0.44	0.52	0.59
u_2	0.24	0.30	0.37	0.44	0.52
u_{exa}	0.22	0.24	0.29	0.35	0.42

项目	s			
	-0.75	-0.5	-0.25	-0.0
u_1	0.65	0.73	0.89	1.00
u_2	0.60	0.70	0.87	1.00
u_{exa}	0.53	0.65	0.85	1.00

1) u_{exa} 为精确解, u_1 为一次渐近解, u_2 为二次渐近解

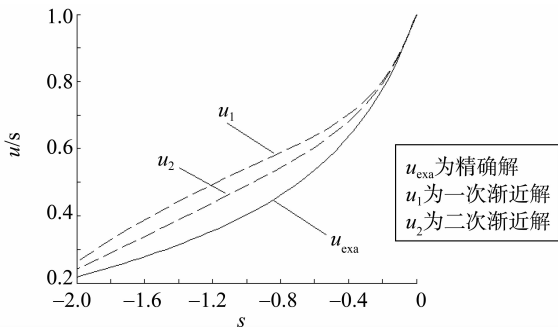


图 1 晶体界面左半面附近光波的模 $u(s)$ 的曲线比较
Fig. 1 Curve comparison for models to the light waves near left half-plane

从图 1 和表 1 可以看出, 二次渐近解 $u_2(s)$ 比一次渐近解 $u_1(s)$ 更接近精确解 $u_{\text{exa}}(s)$ 。

继续由广义变分迭代式 (12), 可依次得到晶体界面内非线性模型 (18) - (19) 的更高次近似函数 $u_n(s)$ ($n = 3, 4, \dots$)。再由 (5) 式, 得到通过晶体界面光波的模 $u(s)$ 在通过界面 $s = 0$ 附近的广义变分迭代 n ($n = 3, 4$) 次渐近解析解。

$$u(s) = \begin{cases} \exp(-\sqrt{2}s), & s \geq 0 \\ u_n(s), & s < 0 \end{cases}$$

由泛函分析变分原理和本方法的渐近理论知, 晶体

界面 $s = 0$ 内部光波的模 $u(s)$ 所对应的高次的变分迭代解比低次的变分迭代解更接近与精确解。

5 晶体界面模型解的物理意义

由于晶体界面 $s = 0$ 内部光波的模 $u(s)$ 是通过广义变分迭代方法得到的近似解析解, 所以它还可以通过解析运算得到与光波模相关的物理量的渐近式。例如, 可得如下相关物理量的近似解析式。

5.1 光波强度

由渐近光波模 $u_n(s)$ 的解析式来得到晶体表面 $s = 0$ 附近的光波强度函数的 n 次渐近式:

$$I_n(s) = \sqrt{I_d} |u_n(s)| = \sqrt{I_d} \left| u_{n-1}(s) + \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \times \int_s^0 [\exp(-2\mu(\xi - s)) \times \sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s))] \times \left[\frac{d^2 u_{n-1}}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du_{n-1}}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u_{n-1} + \frac{4\mu}{1+u_n^2} \frac{du_{n-1}}{d\xi} - \frac{2\alpha u_{n-1}}{1+u_n^2} \right] d\xi \right|$$

其中 I_d 为晶体中的暗辐射值。

5.2 光波模变化率

由光波的 n 次渐近模 $u_n(s)$ 可求出它的的变化率为

$$\frac{du_n}{ds} = \frac{d}{ds} \left[u_{n-1}(s) + \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \times \int_s^0 [\exp(-2\mu(\xi - s)) \times \sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s))] \times \left[\frac{d^2 u_{n-1}}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du_{n-1}}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u_{n-1} + \frac{4\mu}{1+u_n^2} \frac{du_{n-1}}{d\xi} - \frac{2\alpha u_{n-1}}{1+u_n^2} \right] d\xi \right]$$

5.3 光波功率

由 n 次渐近光波模 $u_n(s)$ 的解析式来得到晶体表面 $s = 0$ 附近 $a \leq s \leq 0$ 内的光波功率 P 的 n 次渐近式 P_n

$$P_n = \int_a^0 \left[u_{n-1}(s) + \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}} \times \int_s^0 [\exp(-2\mu(\xi - s)) \times \sin(\sqrt{4\mu^2 + 2(b - \varphi - \alpha)}(\xi - s))] \times \left[\frac{d^2 u_{n-1}}{d\xi^2} - 4\mu \frac{du_{n-1}}{d\xi} - 2(b - \varphi - \alpha)u_{n-1} + \right. \right.$$

$$\frac{4\mu}{1+u_n^2} \frac{du_{n-1}}{d\xi} - \frac{2\alpha u_{n-1}}{1+u_n^2} \left] d\xi \right] ds \quad (23)$$

5.4 光波功率控制

由式 (23) 可以计算出 $\frac{\partial P_n}{\partial b} > 0$ (计算过程略)。因此可以得知光波功率随传播系数 b 的值的增大而单调地递增, 以便对光波功率的控制。

5.5 传播系数和入射光束角度的关联

随着光波功率的递增, 受扩散非线性的影响, 晶体内的表面波衰减的距离逐渐缩短, 大部分能量逐渐向晶体界面集中。我们可以通过调节入射光束与晶体的 s 轴的夹角 ($0^\circ \sim 90^\circ$) 来调节传播参数 b 。

6 结 论

讨论了晶体界面表面波方程, 利用新的经过修改的广义变分迭代方法依次得到了晶体界面 $s = 0$ 内附近的光波的模 $u(s)$ 的各次渐近解析式 $u_n(s) (n = 1, 2, \dots)$ 。根据泛函分析变分原理, 利用对应的线性方程的解作为本非线性问题解的初始近似, 由此得到的迭代解序列 $\{u_n(s) (n = 1, 2, \dots)\}$ 具有较快地接近于精确解的优点, 且随着 $u_n(s)$ 的次数的增大而更接近于精确解。

得到的各次渐近解是解析式还可对它们进行解析运算, 我们可由得到的光模的各次渐近解析式通过微分、积分等解析运算来进一步得到相关的物理量的渐近表示式。扩展了问题讨论的范围。然而, 用单纯数值模拟的方法是达不到的。

参考文献:

- [1] WANG H C, SHE W L. Incoherently coupled grey photovoltaic spatial soliton families [J]. Chin Phys Lett, 2005, 22(1): 128 - 131.
- [2] YIN G Y, ZHENG J B, YANG X Y, et al. New approach for normalizing photon-added and photon-subtracted squeezed states [J]. Chin Phys, 2010, 19(4): 044206.
- [3] LIU S M, ZHANG G Q, SUN Q, et al. Waveguides written and stored by photovoltaic dark spatial Solitons in LiNbO₃:Fe crystals [J]. Chin Phys Lett, 1996, 13(10): 737 - 740.
- [4] 孙彤彤, 卢克清, 陈卫军, 等. 在金属与光折变晶体界面形成的表面波研究 [J]. 物理学报, 2013, 62(3): 034204.
- [5] 冯天闰, 卢克清, 陈卫军, 等. 线性电介质和中心对称光折变晶体界面表面波的研究 [J]. 物理学报, 2013, 62(23): 234205.
- [6] 陈卫军, 卢克清, 惠娟利, 等. LiNbO₃ 晶体界面非线性

- 表面波的研究 [J]. 物理学报, 2015, 64(1): 014204.
- [7] De JAGER E M, JIANG F R. The theory of singular perturbation [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996.
- [8] BARBU L, MOROSANU G. Singularly perturbed boundary-value problems [M]. Basel: Birkhauserm Verlag AG, 2007.
- [9] MO J Q. A class of singularly perturbed differential-difference reaction diffusion equation [J]. Adv Math, 2009, 38(2): 227 - 231.
- [10] MO J Q, LIN W T. Asymptotic solution of activator inhibitor systems for nonlinear reaction diffusion equations [J]. J Sys Sci & Complexity, 2008, 20(1): 119 - 128.
- [11] MO J Q. Approximate solution of homotopic mapping to solitary wave for generalized nonlinear KdV system [J]. Chin Phys Lett, 2009, 26(1): 010204.
- [12] MO J Q. Variational iteration solving method for a class of generalized Boussinesq equation [J]. Chin Phys Lett, 2009, 26(6): 060202.
- [13] MO J Q. Homotopiv mapping solving method for gain fluency of a laser pulse amplifier [J]. Science in China, Ser G, 2009, 39(7): 1007 - 1010.
- [14] MO J Q, LIN W T, WANG H. A class of homotopic solving method for ENSO model [J]. Acta Appl Math Sci, 2009, 29(1): 101 - 110.
- [15] MO J Q, CHEN H J. The corner layer solution of Robin problem for semilinear equation [J]. Math Appl, 2012, 25(1): 1 - 4.
- [16] MO J Q, CHEN X F. Homotopic mapping method of solitary wave solutions for generalized complex Burgers equation [J]. Chin Phys B, 2010, 10(10): 100203.
- [17] 莫嘉琪, 陈贤峰. 一类非线性扰动 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的孤立波近似解析解 [J]. 物理学报, 2010, 50(5): 2919 - 2923.
- [18] 莫嘉琪, 陈贤峰. 一类广义非线性扰动色散方程孤立波的近似解 [J]. 物理学报, 2010, 50(3): 1403 - 1406.
- [19] 欧阳成, 姚静菀, 石兰芳, 等. 一类尘埃等离子体孤波解 [J]. 物理学报, 2014, 63(11): 110203.
- [20] 欧阳成, 石兰芳, 林万涛, 等. (2+1) 维扰动时滞破裂孤波方程行波解的摄动方法 [J]. 物理学报, 2013, 62(17): 170201.
- [21] 欧阳成, 林万涛, 程荣军, 等. 一类厄尔尼诺海-气时滞振子的渐近解 [J]. 物理学报, 2013, 62(6): 060201.
- [22] OUYANG C, CHENG L H, MO J Q. Solving a class of burning disturbed problem with shock layers [J]. Chin Phys B, 2012, 21(5): 050203.
- [23] 何吉欢. 工程和科学中的近似非线性分析方法 [M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 2002.
- [24] HE J H. Variational approach for nonlinear oscillators [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 34(5): 1430 - 1439.